

# 在小波分解下的分形块方法图象编码\*

王毅刚 金以文

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江大学应用数学系 杭州 310027)

**摘要** 本文分析了分形块方法在小波变换下的特点,指出了特殊的块方法是从低分辨率细节构造高分辨率细节的本质,给出了一种简单的解码过程,只需递推有限步便可恢复原图象。根据类似的思想,本文作者提出了更一般的由低分辨率细节构造高分辨率细节的方法。

**关键词** 小波变换,分形块编码方法,子带编码,矢量量化编码,多分辨率

## 1 引言.

1988年, Barnsly<sup>[1]</sup>提出了迭代函数系统(IFS),并指出其用于图象压缩可以获得很高的压缩比。他组建 IFS 公司后,宣称压缩比高达 10000:1<sup>[2]</sup>,从而分形图象压缩受到人们的普遍关注。到 1990年, Jacquin 提出了分形自动编码技术<sup>[3]</sup>之后,分形图象编码的研究论文便如雨后春笋般地涌现出来,而且绝大多数分形图象编码方法是建立在 Jacquin 提出的理论之上的。该方法的主要思想是用变换的不动点来逼近要编码的图象。不动点是由变换决定的,用此对变换系数经过适当量化后存贮来达到压缩的目的。近年来,随着小波分析在数学上的逐步完善,人们也把小波变换用于图象压缩。实验表明,把图象分解成几个有不同方向的频带,一方面符合图象内在的统计性质,另一方面能够很好匹配人眼的视觉灵敏度,结果使得图象压缩编码效率很高<sup>[4]</sup>。小波变换编码和子带编码都是把图象分解成有不同空间方向的不同频带的子图象,不同频带可以对应不同的信噪比,因而可以采用不同的量化方法。人们利用这种编码方法已获得较高的压缩比<sup>[5]</sup>。那么,分形块编码方法与小波变换编码方法谁优谁劣?它们的内在联系是什么?能否把二者有力地结合起来?这些问题

一直困扰着人们。本文分析了在小波基下的 IFS 块方法,在特殊的条件下得到了两者的一致性,并分析了各自的优缺点,提出了把二者结合起来的一般方法。

## 2 理论分析与新方法的提出

设  $P^n$  由一个  $2^n \times 2^n$  的图象的灰度值表示,其对应的连续函数设为

$$\begin{aligned} T^n(x, y) &= \Phi^n(y) P^n \Phi^n(x)^T \\ &= [\varphi_1^n(y), \varphi_2^n(y) \cdots \varphi_{2^n}^n(y)] \\ &\quad \times \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{12^n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{22^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{2^n 1} & p_{2^n 2} & \cdots & p_{2^n 2^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^n(x) \\ \varphi_2^n(x) \\ \vdots \\ \varphi_{2^n}^n(x) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i,j} T_{ij}^n(x, y) \end{aligned}$$

即  $T_{ij}^n(x, y) = P_{ij} \varphi_i^n(y) \varphi_j^n(x)$ , 其中  $\Phi^i(x) = (\varphi_1^i(x), \varphi_2^i(x), \dots, \varphi_{2^i}^i(x))$ ,  $\varphi_i^i(x) = \varphi(2^i x - i)$ ,  $\varphi(x)$  是一维正交小波的生成函数(尺度函数)。易知,  $T^n(x, y)$  是定义在  $[0, 1] \times [0, 1]$  上的函数,一般地,  $T_{ij}^n(x, y)$  只在  $[i/2^n, (i+1)/2^n]$  (可扩展到其周围)上不为零,  $P_{ij}$  为  $T_{ij}^n(x, y)$  有限支撑上的均值<sup>[6]</sup>。最简单的情況为 Haar 小波生成函数。

\* 收稿日期:1995,10,17;收到修改稿日期:1996,04,17

$$\varphi_i^n(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq 2^n x - i < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

根据小波理论<sup>[6]</sup>, 我们可把  $P^n$  分解成更低分辨率  $P^{n-1}$  和细节  $Q_1^{n-1}, Q_2^{n-1}, Q_3^{n-1}$ 。形式如下:

$$T^n(x, y) = \Phi^{n-1}(y)P^{n-1}\Phi^{n-1}(x)^T + \Phi^{n-1}(y)Q_1^{n-1}\Psi^{n-1}(x)^T + \Psi^{n-1}(y)Q_2^{n-1}\Phi^{n-1}(x)^T + \Psi^{n-1}(y)Q_3^{n-1}\Psi^{n-1}(x)^T$$

其中,  $\Psi^j = (\psi_1^j, \psi_2^j, \dots, \psi_{2^j}^j)$ ,  $\psi_i^j = \psi(2^j x - i)$  为小波基。可以看到: 分解系数随分辨率  $n$  的减少呈 4 的幂次式下降。同时,  $\varphi_i^n(x), \varphi_i^{n-1}(x)$  的支撑基逐渐变大。分解形式如图 1。根据小波理论, 很易得到不同分辨率之间的变换形式为一正交镜像滤波。

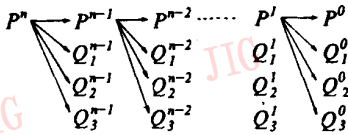


图 1 小波分解形式

Fig. 1 The decomposition by using wavelet transform

下面我们讨论在小波分解情况下的分形块编码。分形块编码方法<sup>[3,7,8]</sup>是对图象的每个  $R$  块寻找最佳匹配  $D$  块。

先讨论最简单的情况: 小波基为 Haar 基,  $D$  块包含整数个  $R$  块。在分形 IFS 块方法中, 先不考虑适应性部分, 把整个图象分成  $2^r \times 2^r$  的  $R$  小方块,  $r \in N$ 。把每一  $R$  块看成一个图象进行小波分解。这时所有  $R$  块上的小波分解系数合起来则构成一个完整图象的分解系数。当  $D$  块包含有整数个  $R$  块时, 则  $D$  块上系数便成为整幅图象上小波分解系数的一部分。

块编码的方法是: 从  $P^{n-1}$  取出一  $\tilde{D}$  块, 其对应  $P^n$  上  $D$  块的低分辨率表示, 用此来匹配  $P^n$  上的  $R$  块。故而不动点应满足:

$$R = s\tilde{D} + 0 \tag{1}$$

显然,

$$R(x, y) = T^n(x, y)|_R = \Phi_R^{n-1}(y)P_R^{n-1}\Phi_R^{n-1}(x)^T + \Psi_R^{n-1}(y)Q_{1R}^{n-1}\Phi_R^{n-1}(x)^T + \Phi_R^{n-1}(y)Q_{2R}^{n-1}\Psi_R^{n-1}(x)^T + \Psi_R^{n-1}(y)Q_{3R}^{n-1}\Psi_R^{n-1}(x)^T$$

$$= \Phi_R^{n-r}P_R^{n-r}\Phi_R^{n-rT} + \Psi_R^{n-r}Q_{1R}^{n-r}\Phi_R^{n-rT} + \Phi_R^{n-r}Q_{2R}^{n-r}\Psi_R^{n-rT} + \Psi_R^{n-r}Q_{3R}^{n-r}\Psi_R^{n-rT} + \dots + \Psi_R^{n-1}Q_{3R}^{n-1}\Psi_R^{n-1T}$$

设几何压缩比为 2,  $D(x, y) = \Phi_D^n P_D^n \Phi_D^{nT}$  则:  $\Phi_D^i(x) = \Phi_R^i(x), \Psi_D^i(x) = \Psi_R^i(x), i = 0, n$ 。因此,

$$\tilde{D}(x, y) = \Phi_R^n(y)P_D^{n-1}\Phi_R^n(x)^T = \Phi_R^{n-1}(y)P_D^{n-2}\Phi_R^{n-1}(x)^T + \Psi_R^{n-1}(y)Q_{1D}^{n-2}\Phi_R^{n-1}(x)^T + \Phi_R^{n-1}(y)Q_{2D}^{n-2}\Psi_R^{n-1}(x)^T + \Psi_R^{n-1}(y)Q_{3D}^{n-2}\Psi_R^{n-1}(x)^T = \Phi_R^{n-r}P_D^{n-r-1}\Phi_R^{n-r-1T} + \Psi_R^{n-r}Q_{1D}^{n-r-1}\Phi_R^{n-r-1T} + \Phi_R^{n-r}Q_{2D}^{n-r-1}\Psi_R^{n-r-1T} + \dots + \Psi_R^{n-1}Q_{1D}^{n-2}\Phi_R^{n-1T} + \Phi_R^{n-1}Q_{2D}^{n-2}\Psi_R^{n-1T} + \Psi_R^{n-1}Q_{3D}^{n-2}\Psi_R^{n-1T}$$

由于  $\Phi_R^{n-r}$  在  $R$  上恒为 1,  $P_D^{n-r}$  与  $P_D^{n-r-1}$  均变成了一个系数, 即均值。由小波基的正交性和 (1) 式可得

$$Q_{3R}^{n-i} = s Q_{3D}^{n-i-1} \tag{2}$$

$$Q_{2R}^{n-i} = s Q_{2D}^{n-i-1} \tag{3}$$

$$Q_{1R}^{n-i} = s Q_{1D}^{n-i-1} \quad \text{其中, } i = 1, r \tag{4}$$

$$0 = \hat{p}_R^{n-r} - s P_D^{n-r-1} \Phi_R^{n-1}(x)^T$$

从而可以说, IFS 块方法的主要思想是用低分辨率的细节来构造高分率的细节, 它利用的相关性实际上是不同层细节之间的相似性。根据这个思想, 当我们记录了每个  $R$  块的均值和所有的变换时, 可以看到其解码过程如下: 把每一个  $R$  区域作小波分解, 如图 2。所有  $R$  块的均值构成了原图象的最低分辨率

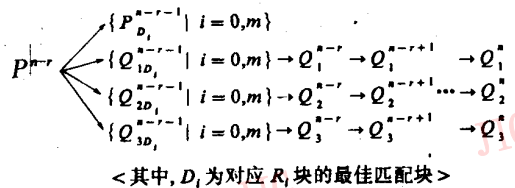


图 2 块方法的解码过程

Fig. 2 Decoding in fractal block-coding method

率  $P^{n-r}$ , 在  $D$  块上的系数又可以继续分解到下一层, 得  $P_D^{n-r-1}, Q_{1D}^{n-r-1}, Q_{2D}^{n-r-1}$ , 和  $Q_{3D}^{n-r-1}$ , 利用变换可得到  $Q_{1R}^{n-r}, Q_{2R}^{n-r}$  和  $Q_{3R}^{n-r}$ , 将所有  $R$  块系数组合到一起正好为整体变换的  $Q_1^{n-r}, Q_2^{n-r}$  和  $Q_3^{n-r}$ , 在这之后,  $D$  块上

的小波分解系数成为整体系数的一部分，从而由它通过变换可以得到  $Q_1^{n-r+1}, Q_2^{n-r+1}$  和  $Q_3^{n-r+1}$ ，再  $Q_i^{n-r+2}, \dots$ ，一直到  $Q_i^n (i = 1, 2, 3)$ 。从而可由  $\{P^{n-r}, Q_1^{n-r}, Q_2^{n-r}, Q_3^{n-r}, Q_1^{n-r+1}, Q_2^{n-r+1}, Q_3^{n-r+1}, \dots, Q_1^n, Q_2^n, Q_3^n\}$  合成得到最终的恢复图象，这就是文献[9]提出的有限步迭代收敛的本质。但是，分形 IFS 方法编码所对应的这种构造过程是很特殊的，它要求：

- (1)  $s$  呈压缩性质，即  $|s| < 1$ ；
- (2) 每次由低层向高层构造的规则是一样的，由  $D$  与  $R$  的对应位置来决定，这就要求每层分辨率之间存在着同样的相似性。这是一个非常苛刻的条件，也是一些块找不到较好匹配的原因。从上面解码过程来看，条件(1)，即  $s$  呈压缩性质是完全没有必要的。对于这种特殊的块方法，对任何的  $s$  值，它都满足同样的解码过程。其逼近程度取决于各分辨率上对应的总误差。

若这一结果可推广到一般块方法的话，那将非常完美。可惜，当不为 Haar 基或  $D$  块不包含整数个  $R$  块时，有限步收敛的结论便不成立。因为不是 Haar 基时，对单个  $R$  块(或  $D$  块)作的小波分解系数不再是对整幅图象作的小波分解系数的一部分。

尽管如此，它给我们提供了一个非常好的编码思想：找到低分辨率细节与高分辨率细节的相似性变换，从而由低分辨率构造高分辨率。早期的小波变换编码和子频带编码只利用了同层分辨率上的相关性，矢量量化与小波变换结合的编码稍稍地利用了不同层细节之间的相似性(它相当于  $s = 1, o = 0$  的线性关系)。但从对分形块方法编码的研究可看到不同层细节的相关性大有潜力可挖。文献[10]给出了利用这种相似性的方法。他们对图象进行小波分解，接着对所得系数采用矢量量化方法进行编码，量化是分层进行的，相邻两个分辨率上相同区域可产生四种对应关系。如图 3 对应映射为： $3 \rightarrow 8, 3 \rightarrow 9, 3 \rightarrow 4$  和  $3 \rightarrow 10$ ，其中， $3, 8, 9, 4, 10$  为其经矢量量化后的对应下标。对每种映射进行统计，可获得映射的码

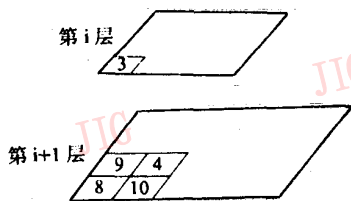


图 3 相邻层的映射

Fig. 3 Maps of neighboring levels

本，从而可以对映射进行无损失量化。对于不能采用映射的块，仍记录原来的下标。可以看到，两映射相同，说明对应的两区域有相似性，类似于 IFS 中  $R$  块和  $D$  块的关系，只不过这里灰度比例因子  $s = 1$ ，它更广的一面是  $R$  块和  $D$  块也可以是同层分辨率。但它的每一映射只是相邻两层之间的关系，而 IFS 是对所有不同分辨率上的整体关系。

根据这些思想，我们可以设计一般性的编码方法。记录最低分辨率和所有的不同层之间的线性映射，从而可以递推得到整个图象的信息。

它的特点是：(1)利用了不同层分辨率细节之间的相似性；(2)克服了矢量量化需要外部码本的缺点；(3)解码过程只需有限步递推。

### 3 结 论

在由低分辨率细节构造高分辨率细节方法的基础上，我们可以看到分形块编码方法与小波变换编码之间的关系，并给小波变换编码提供了新的思想，提醒人们必须重视对不同层分辨率细节之间的相似性的利用。尽管我们提出了较为一般的利用相邻层之间相似性的方法，但是如何达到实用仍需研究。新的方法的特点是解码过程简单、迅速，可以达到实时，这是它比一般分形块编码方法优越的地方。一般块方法允许  $D$  块不一定包含整数个  $R$  块，并且  $D$  块的大小不一定为  $R$  块大小的 2 倍，从而增加了匹配候选块，有望减少匹配误差。然而新的方法不要求相邻层之间的匹配规则相同，无需压缩要求，也有可能得到较好的结果。所以两者各有千秋，但两者的实现方法和技巧有待进一步研究。

### 参 考 文 献

- [1] M. F. Barnsley. *Fractal Everywhere*. Academic Press New York, 1988.
- [2] M. F. Barnsley and A. D. Sloan. A Better Way to Compress Images *Byte*, January, 1988, PP215—223.
- [3] A. E. Jacquin. A Novel Fractal Block-Coding Technique for Digital Images. Proc. ICASSP, Albuquerque, New Mexico, 1990.
- [4] S. G. Mallat. Multifrequency Channel Decompositions of images and Wavelet models. *IEEE Trans. ASSP*, Vol. 37, No. 12, Dec. 1989.
- [5] R. A. Dovore, et al. Image Compression through Wavelet transformcoding. *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. 38, No. 2, Mar. 1992.
- [6] 秦前清, 杨宗凯. 实用小波分析. 西安: 西安电子科技大学出版社.
- [7] A. Jacquin. Fractal Image Coding: A Review, Proc. *IEEE*, Oct. 1993, PP1451—1465.
- [8] D. Saupe, R. Hamzaoui. A Review of the Fractal Image Compression Literature. *Computer Graphics*, Vol. 28, No. 4, November, 1994, PP268—276.
- [9] G. E. Øien, S. Lepsø, Fractal-based image coding with fast de-

coder convergence. *Signal Processing*, Vol. 40, 1994, PP105 - 117.

tal-Based Image Compression. *SPIE*, Vol. 1605, VCIP 91; Visual Communication, PP467-474.

[10]A. Pentland and B. Horowitz. A Practical Approach to Frac-



王毅刚, 1992年毕业于西安交通大学应用数学系, 获学士学位, 1995年在浙江大学应用数学系获硕士学位, 现为该系博士研究生, 主要研究方向是计算图形学与虚拟现实。

## The Fractal Block Coding under Wavelet Transformation

Wang Yigang, Jin Yiwen

(State Key Lab. of CAD&CG, Department of Applied Mathematics, ZheJiang University, HangZhou, China 310027)

**Abstract** Based on the analysis of the properties of the fractal block-coding, the authors point out that the special fractal block-coding is capable of the high level resolution details from the low level resolution details. Then, a simple decoding method in which the decoding iteration needs only finite steps is presented. According to this idea, we show a more general method that constructs the high level resolution details from the low level resolution details.

**Keywords** Wavelet transformation, Fractal block-coding, Subband coding, VQ method, Multiresolution

### 科技动态

### NEWS RELEASE

### 四川省会议电视网全面开通

美国视讯公司(CLI)1996年6月27日讯 四川省会议电视网经过四川省邮电管理局与CLI工程技术人员的通力合作,已全面开通投入运行。

四川省邮电管理局通过对多个会议电视厂商的产品、技术、服务的综合考察,于1995年10月选中CLI公司的会议电视系统为其省会议电视网设备,一期工程通过CLI的高品质会议电视系统Radianc和多点控制器MCU,联通全省23个地、市、州,并与同样全部采用CLI公司设备的国家会议电视骨干网联通。

四川省幅员辽阔、地势复杂、各会场分散,线路状况参差不齐,CLI公司的设备完全适应了各种不同的要求和环境,再一次验证了它在会议电视领域的领先技术,获得了四川省邮电用户的一致好评。由于与国家会议电视骨干网采用的同为CLI的会议电视系统,保证了参加全国会议及跨省会议的联通质量,并可实现主席控制。远端摄像机遥控等功能,使跨地区会议的召开更加方便、灵活。

这次采用的Radianc是CLI公司的大型会议室系统产品,提供576线,30帧每秒的电视图象质量分辨率,速率在64Kbps到2Mbps之间可调,可成功运行于ATM、DDN、IS-

DN、CDMA、VSAT等现有各种网络,提供灵活的组网方案,已被国家骨干网及各大省网相继采用,CLI是全球会议电视系统的创始者和领先厂商,也是世界视讯标准的制定推广者,在国内拥有400个安装点,成为国内领先的会议电视系统提供商。1995年初建立的“CLI会议电视设备保税库和维修中心”更为国内用户提供及时快捷的服务。

美国视讯公司北京办事处

北京市复兴门外大街6号光大大厦20层

电话:(010)68561026、68561027、68561028、

68561029、68561030

传真:(010)68561018

邮编:100045

美国视讯公司华东办事处

江苏省南京市南京饭店商务楼632房

电话:(025)3411888—2632、3400110

传真:(025)3400110

邮编:210003